数理解析研究所講究録
1144 巻 2000 年 39-46

Djokovic 不等式の一考察

山形大・工　高橋眞映（Sin-Ei Takahasi）
岡山県立大・情報工　高橋泰嗣（Yasuji Takahashi）
九州工大・情報工　本田あおい（ Aoi Honda）

1。問題意識　n 次元 Euclid 空間 R^n の任意の元 x, y, z に対して、常に

$$\|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\| \leq \|x\|+\|y\|+\|z\|+\|x+y+z\|$$

が成り立つ。これが良く知られた Hlawka 不等式 (cf. [1], [3]) であるが、これは任意のHilbert 空間に対しても成り立つ。一般に Hlawka 不等式の成り立つ Banach 空間をここでは Hlawka 空間と呼ぶことにする。L^1 – 空間の部分空間は Hlawka 空間であることが知られているがそれ以上のことは知られていないように思われる。

さて Hlawka 不等式の拡張はいろいろなされているが、そのうちの一つに、Djokovic 不等式 (cf. [2]) と言うのがある。それは次の定理の主張する不等式を言う。

Theorem D. Let X be a Hlawka space and n, k natural numbers with $2 \leq k \leq n-1$. Then

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\| \leq \binom{n-2}{k-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| + \binom{n-2}{k-2} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

holds for all $x_1, \cdots, x_n \in X$.

歴史的には $k=2$ の場合が Admovic の不等式であり、$k=2, n=3$ の場合が丁度 Hlawka 不等式になっている。この不等式はやや遅れて D. M. Smiley とM. F. Smiley [4] も独立に得ている。

ところでこの不等式は一体何を意味しているのであろうか？またそこに現れる定数 $\binom{n-2}{k-1}$, $\binom{n-2}{k-2}$ はどう言う意味を持っているのであろうか？自然な疑問が湧いてくる。そこでそれに一つの解答を与えようと言うのがここでの我々の目的である。

2。信念　先ず、一番弱いものと一番強いものが助け合えば、他を効率よく制する事ができるだろうと言う信念を持とう。この信念のもとに上の問題の答えを考えようというのである。

３。考察　今 X を Banach 空間、n を自然数とする。自然数 k $(1 \le k \le n)$ 及び $x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して、

$$\delta_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left\| x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \right\|$$

と置く。このとき $\{\delta_k : 1 \le k \le n\}$ は線形空間 $X \oplus \cdots \oplus X$ （n 個の直和）上のセミノルムの系をつくり、次の意味で δ_n が一番弱く、δ_1 が一番強くなっている：

$$\binom{n-1}{k-1}\delta_n \le \delta_k \le \binom{n-1}{k-1}\delta_1 \ (1 \le k \le n).$$

実際、任意の $(x_1, \cdots, x_n) \in X \oplus \cdots \oplus X$ に対して、

$$\begin{aligned}\delta_k(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left\| x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \right\| \\ &\le \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{j=1}^{k} \left\| x_{i_j} \right\| = \binom{n-1}{k-1}\delta_1(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\delta_k(x_1, \cdots, x_n) &\ge \left\| \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \right\| \\ &= \left\| \binom{n-1}{k-1}x_1 + \cdots + \binom{n-1}{k-1}x_n \right\| = \binom{n-1}{k-1}\delta_n(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つので与式を得る。

我々の信念をこの場合式にすると、

$$\delta_k \le \alpha\delta_1 + \beta\delta_n \ \text{on} \ X \oplus \cdots \oplus X$$

となる。ここで α, β は実定数を表わす。また効率性に関してはなかなか定義の難しいところであるが、α も β もなるべく小さくというのが理想であろう。Djokovic 不等式は丁度この信念に基づいたものと考えられる。

次に効率性を考察するために上式を満たすような α, β の組 (α, β) の全てを考え、その集合を $D(n, k; X)$ で表わし、さしあたりこれを Djokovic 領域と呼ぶことにする。また Djokovic 不等式に現われる定数によって定義される平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の点

$$\left(\binom{n-2}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}\right)$$

を Djokovic 点と呼ぶことにする。この定義によれば、Djokovic 不等式は、Djokovic 点が Hlawka 空間 H と n, k $(2 \le k \le n-1)$ に対する Djokovic 領域に属していることを主張している。従って Djokovic 領域と Djokovic 点の幾何学的関係を調べれば、Djokovic 不等式に現われる定数の意味がわかるというものである。

３。結果　上の幾何学的関係を調べた結果を大まかに言うと、『Djokovic 領域は閉凸で、すべての Banach 空間のなかで Hlawka 空間の場合が最大領域となり、そ

の領域は完全に決定され、Djokovic 点 $\left(\binom{n-2}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}\right)$ はその唯一の端点である』というものである。詳しくは次の定理を得た。

Theorem 1. Let X be a non-trivial real Banach space and $1 \leq k \leq n$. Then

(i) $D(n, k; X)$ is a closed convex subset of $\boldsymbol{R}^2$.

(ii) $D(1, 1; X) = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha + \beta \geq 1\}$.

(iii) $D(n, 1; X) = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq 1 \text{ and } \alpha + \beta \geq 1\}$ for $n \geq 2$.

(iv) $D(n, n; X) = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq 0 \text{ and } \alpha + \beta \geq 1\}$ for $n \geq 2$.

(v) $D(n, k; X) \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq \binom{n-2}{k-1} \text{ and } \alpha + \beta \geq \binom{n-1}{k-1}\}$ for $2 \leq k \leq n-1$.

(vi) If X is a Hlawka space, then

$$D(n, k; X) = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq \binom{n-2}{k-1} \text{ and } \alpha + \beta \geq \binom{n-1}{k-1}\} \text{ for } 2 \leq k \leq n-1.$$

(vii) $\left(\binom{n-2}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}\right)$ is the only extreme point of $D(n, k; X)$ for $2 \leq k \leq n-1$.

注意：(vi) は逆も正しい。これは後で述べる Proposition 3 から導かれる。

Proof of Theorem 1. (i) and (ii) These follow from an easy observation.

(iii) Let $(\alpha, \beta) \in D(n, 1; X)$ and e a unit vector in X. Then

$$\delta_1(e, -e, 0, \cdots, 0) \leq \alpha\delta_1(e, -e, 0, \cdots, 0) + \beta\delta_n(e, -e, 0, \cdots, 0)$$

holds and hence $1 \leq \alpha$. Also

$$\delta_1(e, 0, \cdots, 0) \leq \alpha\delta_1(e, 0, \cdots, 0) + \beta\delta_n(e, 0, \cdots, 0)$$

holds and hence $1 \leq \alpha + \beta$. Therefore $D(n, 1; X) \subseteq \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq 1 \text{ and } \alpha + \beta \geq 1\}$.

Conversely, observe that all points on the semi lines L_1 and L_2 belong to the domain $D(n, 1; X)$, where

$$L_1 = \{(\alpha, \beta) : \alpha = 1, \beta \geq 0\}$$

and

$$L_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = 1, \beta \leq 0\}.$$

Since $\mathrm{co}(L_1 \cup L_2) = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq 1 \text{ and } \alpha + \beta \geq 1\}$, it follows from (i) that the inverse inclusion holds. Here co denotes the convex hull.

(iv) This follows from the same observation as (iii).

(v) Suppse $2 \leq k \leq n-1$. Let $(\alpha, \beta) \in D(n, k; X)$ and e a unit vector in X. Then

$$\delta_k(e, -e, 0, \cdots, 0) \leq \alpha\delta_1(e, -e, 0, \cdots, 0) + \beta\delta_n(e, -e, 0, \cdots, 0)$$

holds. Since $\delta_k(e, -e, 0, \cdots, 0) = 2\binom{n-2}{k-1}$, $\delta_1(e, -e, 0, \cdots, 0) = 2$ and $\delta_n(e, -e, 0, \cdots, 0) = 0$, it follows that $\binom{n-2}{k-1} \le \alpha$. Also

$$\delta_k(e, 0, \cdots, 0) \le \alpha\delta_1(e, 0, \cdots, 0) + \beta\delta_n(e, 0, \cdots, 0)$$

holds. Since $\delta_k(e, 0, \cdots, 0) = \binom{n-1}{k-1}$, $\delta_1(e, 0, \cdots, 0) = \delta_n(e, 0, \cdots, 0) = 1$, it follows that $\binom{n-1}{k-1} \le \alpha + \beta$. Consequently, we obtain the desired result.

(vi) Suppose that X is a Hlawka space and $2 \le k \le n-1$. By Djokovic's inequality, we see that $\left(\binom{n-2}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}\right)$ belongs to the Djokovic domain $D(n, k; X)$. This fact implies that all points on the semi-line

$$L_3 = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha = \binom{n-2}{k-1}, \beta \ge \binom{n-2}{k-2}\}$$

also belong to $D(n, k; X)$. Moreover, all points on the semi-line

$$L_4 = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \beta \le 0, \alpha + \beta = \binom{n-1}{k-1}\}$$

also belong to $D(n, k; X)$. In fact, if $\beta \le 0$ and $x_1, \cdots, x_n \in X$, then we have

$$\begin{aligned}
\delta_k(x_1, \cdots, x_n) - \beta\delta_n(x_1, \cdots, x_n) &\le \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left(\|x_{i_1}\| + \cdots + \|x_{i_k}\|\right) - \beta\delta_n(x_1, \cdots, x_n) \\
&\le \binom{n-1}{k-1} \delta_1(x_1, \cdots, x_n) - \beta\delta_1(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \left(\binom{n-1}{k-1} - \beta\right) \delta_1(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

and hence $\left(\binom{n-1}{k-1} - \beta, \beta\right)$ must belong to $D(n, k; X)$. Therefoe all points on L_4 belong to $D(n, k; X)$. Then we see form (i) that $\mathrm{co}(L_3 \cup L_4) \subseteq D(n, k; X)$.

On the other hande, note that $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}$ and hence

$$\mathrm{co}(L_3 \cup L_4) = (\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \ge \binom{n-2}{k-1} \text{ and } \alpha + \beta \ge \binom{n-1}{k-1}\}.$$

Consequently, $\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \ge \binom{n-2}{k-1}$ and $\alpha + \beta \ge \binom{n-1}{k-1}\} \subseteq D(n, k; X)$. The inverse inclusion follows from (v).

(vii) This follows immediately from (vi). Q. E. D.

以上はDjokovic領域を上から抑えた場合に付いて考察したものであるが、下から抑えたらどうなるか考えてみると次の結果を得る。

Theorem 2. Let X be a non-trivial real Banach space and $2 \le k \le n-1$. Then

(i) $\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \ge \binom{n-1}{k-1}$ and $\alpha + \beta \ge \binom{n-1}{k-1}\} \subseteq D(n, k; X)$ for $2 \le k \le \frac{n}{2}$.

(ii) $\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \ge \binom{n-1}{k}$, $\alpha + \beta \ge \binom{n-1}{k-1}$ and $n\alpha + (2k-n)\beta \ge n\binom{n-1}{k-1}\}$

$\subseteq D(n, k; X)$ for $\frac{n}{2} < k \le n-1$.

Proof. Let $x_1, \cdots, x_n \in X$. Then we have

$$\begin{aligned}\delta_k(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n} \left\| x_1 + \cdots + x_n - (x_{j_1} + \cdots + x_{j_{n-k}}) \right\| \\ &\le \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n} \left\| x_1 + \cdots + x_n \right\| + \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n} \left(\left\| x_{j_1} \right\| + \cdots + \left\| x_{j_{n-k}} \right\| \right) \\ &= \binom{n}{k} \delta_n(x_1, \cdots, x_n) + \binom{n-1}{n-k-1} \delta_1(x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

Since $\binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{k}$, it follows that $\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n}{k}\right)$ belongs to the Djokovic domain $D(n, k; X)$. This implies that all points on the semi-line

$$L_5 = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha = \binom{n-1}{k}, \beta \ge \binom{n}{k}\}$$

also belong to $D(n, k; X)$. Also since $\delta_k \le \binom{n-1}{k-1}\delta_1$, it follows that all points on the semi-line

$$L_6 = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha = \binom{n-1}{k-1}, \beta \ge 0\}$$

belong to $D(n, k; X)$. Moreover, as observed in the proof of Theorem 1- (vi), all points on the semi-line $L_4 = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \beta \le 0, \alpha + \beta = \binom{n-1}{k-1}\}$ belong to $D(n, k; X)$. Then we have $\mathrm{co}(L_4 \cup L_5 \cup L_6) \subseteq D(n, k; X)$. Note that $\binom{n-1}{k-1} \le \binom{n-1}{k}$ if and only if $k \le \frac{n}{2}$. Hence $\mathrm{co}(L_4 \cup L_6) \subseteq D(n, k; X)$ for $2 \le k \le \frac{n}{2}$ and $\mathrm{co}(L_4 \cup L_5) \subseteq D(n, k; X)$ for $\frac{n}{2} < k \le n-1$. Q. E. D.

我々は特にHlawka caseつまり、$n=3, k=2$ について考察する。今 X を任意のBanach空間とし、$D(X) = D(3, 2; X)$ 及び

$$D_\infty = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \ge 1\ ,\ \alpha + \beta \ge 2 \text{ and } 3\alpha + \beta \ge 6\},$$

$$D_H = \{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{R}^2 : \alpha \geq 1\ ,\ \alpha + \beta \geq 2\}$$

と置くと、Theorems 1, 2 から $D_\infty \subseteq D(X) \subseteq D_H$ を得る。更に Theorem 1 は X が Hlawka 空間なら、$D(X) = D_H$ であることを主張している。勿論 Hlawka 空間の定義から、容易に逆も正しいことがわかる。それでは D_∞ を実現させる Banach 空間があるかと言えば、$X = \ell_n^\infty(\boldsymbol{R})$ $(3 \leq n \leq \infty)$ のとき、$D_\infty = D(X)$ となっている。実際、

$$x = (-1, 1, 1, 0, \cdots)\ ,\ y = (1, -1, 1, 0, \cdots)\ ,\ z = (1, 1, -1, 0, \cdots)$$

と置くと容易な計算か

$$\|x+y\| + \|y+z\| + \|z+x\| \leq \alpha(\|x\| + \|y\| + \|z\|) + \beta\|x+y+z\|$$

は $3\alpha + \beta \geq 6$ と書き換えられことがわかり、この事実と、$D_\infty \subseteq D(\ell_n^\infty(\boldsymbol{R}))$ より、$D(\ell_n^\infty(\boldsymbol{R})) \subseteq D_\infty$ であると推論できるからである。しかしながら Hlawka 空間を決定することの困難さと同じくらい、$D_\infty = D(X)$ を満たす Banach 空間 X を決定することは難しそうである。またこれらの Banach 空間の中間を Djokovic 領域で分類しようとすると、領域 $D_H \setminus D_\infty$ が問題になってくるが、これは $\alpha\beta-$平面上の 3 点 $(1, 1), (1, 3), (2, 0)$ のつくる三角形のことであり、今後謎の三角形ととして再登場するかも知れない。

最後に Djokovic's inequality の成り立つ空間は Hlawka 空間の範疇を越えないことを示して終わりにしたい。

Proposition 3. A Banach space X is Hlawka if and only if there exists natural numbers n and k such that $2 \leq k \leq n-1$ and

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\| \leq \binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^n \|x_i\| + \binom{n-2}{k-2}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \text{ holds for any } x_1, \cdots, x_n \in X.$$

Proof. (i) Necessity. Take $n = 3$ and $k = 2$.

(ii) Suffciency. Let n and k be such that $2 \leq k \leq n-1$ and suppose

$$(*) \qquad \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\| \leq \binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^n \|x_i\| + \binom{n-2}{k-2}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|$$

holds for any $x_1, \cdots, x_n \in X$. We can assume $n \geq 4$. Let us consider the case of $x_4 = \cdots = x_n = 0$. Then

$$\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^n \|x_i\| + \binom{n-2}{k-2}\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| = \binom{n-2}{k-1}(\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\|) + \binom{n-2}{k-2}\|x_1 + x_2 + x_3\|.$$

Set

$$\rho_0 = \#\{(i_1,\cdots,i_k) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,\ \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = \left|x_1 + x_2 + x_3\right|\},$$

$$\rho_j = \#\{(i_1,\cdots,i_k) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,\ \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = \left|x_j\right|\}\ (j-1,2,3),$$

$$\rho_4 = \#\{(i_1,\cdots,i_k) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,\ \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = \left|x_1 + x_2\right|\},$$

$$\rho_5 = \#\{(i_1,\cdots,i_k) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,\ \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = \left|x_2 + x_3\right|\}$$

and

$$\rho_6 = \#\{(i_1,\cdots,i_k) : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n,\ \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = \left|x_3 + x_1\right|\}.$$

Then

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right|$$
$$= \rho_0\left|x_1 + x_2 + x_3\right| + \rho_1\left|x_1\right| + \rho_2\left|x_2\right| + \rho_3\left|x_3\right| + \rho_4\left|x_1 + x_2\right| + \rho_5\left|x_2 + x_3\right| + \rho_6\left|x_3 + x_1\right|.$$

Note that

$$\rho_0 = \begin{cases} 0, \text{ if } k=2 \\ \binom{n-3}{k-3}, \text{ if } k \ge 3 \end{cases}, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \begin{cases} n-3, \text{ if } k=2 \\ \binom{n-3}{k-1}, \text{ if } k \ge 3 \end{cases}$$

and

$$\rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \begin{cases} 1, \text{ if } k=2 \\ \binom{n-3}{k-2}, \text{ if } k \ge 3. \end{cases}$$

Hence, if $k=2$, then

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right| = (n-3)\left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right| + \left|x_3\right|\right) + \left|x_1 + x_2\right| + \left|x_2 + x_3\right| + \left|x_3 + x_1\right|$$

and

$$\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right| + \binom{n-2}{k-2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = (n-2)\left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right| + \left|x_3\right|\right) + \left|x_1 + x_2 + x_3\right|.$$

Then (*) implies that

$$\left|x_1 + x_2\right| + \left|x_2 + x_3\right| + \left|x_3 + x_1\right| \le \left|x_1\right| + \left|x_2\right| + \left|x_3\right| + \left|x_1 + x_2 + x_3\right|$$

holds for any $x_1, x_2, x_3 \in X$. Therefore X is a Hlawka space. Moreover, if $k \ge 3$, then

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\right|$$
$$= \binom{n-3}{k-3}\left|x_1 + x_2 + x_3\right| + \binom{n-3}{k-1}\left(\left|x_1\right| + \left|x_2\right| + \left|x_3\right|\right) + \binom{n-3}{k-2}\left(\left|x_1 + x_2\right| + \left|x_2 + x_3\right| + \left|x_3 + x_1\right|\right)$$

and hence (*) implies that

(**)

$$\binom{n-3}{k-3}\left\|x_1+x_2+x_3\right\|+\binom{n-3}{k-1}\left(\left\|x_1\right\|+\left\|x_2\right\|+\left\|x_3\right\|\right)+\binom{n-3}{k-2}\left(\left\|x_1+x_2\right\|+\left\|x_2+x_3\right\|+\left\|x_3+x_1\right\|\right)$$

$$\leq\binom{n-2}{k-1}\left(\left\|x_1\right\|+\left\|x_2\right\|+\left\|x_3\right\|\right)+\binom{n-2}{k-2}\left\|x_1+x_2+x_3\right\|$$

holds for any $x_1, x_2, x_3 \in X$. Note that

$$\binom{n-2}{k-2}-\binom{n-3}{k-3}=\binom{n-2}{k-1}-\binom{n-3}{k-1}=\binom{n-3}{k-2}$$

and so (**) implies that

$$\left\|x_1+x_2\right\|+\left\|x_2+x_3\right\|+\left\|x_3+x_1\right\|\leq\left\|x_1\right\|+\left\|x_2\right\|+\left\|x_3\right\|+\left\|x_1+x_2+x_3\right\|$$

holds for any $x_1, x_2, x_3 \in X$. Therefore X is a Hlawka space. Q. E. D.

References

[1] P. S. Bullen, D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, Means and Their Inequalities, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo, 1988.

[2] D. Z. Djokovic, Generalizations of Hlawka's inequality, Glasnik Mat.-Fiz. Astromon. Ser. II. Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske 18(1963), 169-175]

[3] H. Hornich, Eine Ungleichung für Vektorlangen, Math. Z., 48(1942), 268-274.

[4] D. M. Smiley and M. F. Smiley, The polygonal inequalities, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 755-760.